Compiti svolti di Analisi Matematica 1

Prof. M. Novaga

(co-docente: M.S. Gelli)

- Test ed esercizi assegnati ad ingegneria dell'energia fino al 2013

Introduzione:

Sia i test che gli esercizi dello scritto vertono principalmente sulla convergenza delle serie, sullo studio di successioni, sullo studio di funzioni (con disegno del grafico), sul calcolo e sulla discussione di integrali (anche impropri), sulla risoluzione di eq. differenziali di primo ~~grado~~ e secondo ordine (a coeff. costanti) omogenee e non, e su esercizi su numeri complessi e sviluppi in serie di Taylor.

Il compito gode di un format preciso che non cambia da appello ad appello, perciò, una volta imparate le tipologie di esercizio ed i metodi di ragionamento, si dovrebbe passarlo senza problemi.

Al fine di arrivare a tale preparazione, nelle prime 6 pagine ho riportato riassunti teorici sui metodi di risoluzione (quindi con riscontri pratici) ~~dei~~ dei classici esercizi, ed in seguito, specialmente nei primi questi e testi, ho evidenziato in maniera schematica e pratica ~~la~~ la metodologia e i ragionamenti.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

Formulario Analisi I

Serie

$\sum a_k$ converge $\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

$\Leftrightarrow$ • se $\lim_{k\to+\infty} a_k \neq 0$ (o $\nexists$) $\Rightarrow \sum a_k$ non converge

• se $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0 \Rightarrow \sum a_k$ potrebbe converge

geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ — $\frac{1}{1-r}$ se $-1<r<1$ — $+\infty$ se $r \geq 1$ — indet se $r \leq -1$

armonica: $\sum \frac{1}{k}$ / $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ — $+\infty$ se $\alpha \leq 1$ conv. $\alpha>1$ — $<+\infty$ se $\alpha>1$ div. $\alpha \leq 1$

armonica logaritmica $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

- $\alpha<1$ diverge $\forall \beta$
- $\alpha>1$ converge $\forall \beta$
- $\alpha=1$ — converge $\Leftrightarrow \beta<-1$ — diverge $\Leftrightarrow \beta \geq -1$

$\sum \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{(\ln n)^\beta}$ $\alpha=1$ — conv $\Leftrightarrow \beta>1$ — div $\Leftrightarrow \beta \leq 1$

Criteri

- **confronto:** $0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv
  $\sum a_n$ div $\Rightarrow \sum b_n$ div
- **c.r. asintotico:** $a_n, b_n > 0$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ (ovvero $a_n = b_n(1+o(1))$)
  $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento
  2) se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ allora se $\sum a_n$ conv. allora $\sum b_n$ conv.
  $\sum b_n$ div. allora $\sum a_n$ div
  3) se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell > 0 \neq +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\ell b_n} = 1$ ad applico 1) a a_n e ℓb_n
  4) se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$ applico 2)
- **radice** $a_n \geq 0$, se $\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$ allora $\sum a_n$ — converge se $\ell<1$ — diverge se $\ell>1$
- **rapporto** $a_n \geq 0$ se $\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, allora $\sum a_n$ — conv. se $\ell<1$ — non conv. — div. se $\ell>1$
- **condensazione Cauchy** $a_n \geq 0$ t.c. $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n \Rightarrow 0$ allora $\sum a_k \sim \sum 2^k a_{2^k}$

Proprietà generali:

- dato $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum \lambda a_n$ converge
  $\sum a_n$ diverge a $+\infty \Leftrightarrow \sum \lambda a_n$ diverge a $\operatorname{sgn}(\lambda)\infty$
  Segno alterno $\sum a_n$ indet $\Leftrightarrow \sum(\lambda a_n)$ indet
- Convergenza assoluta: $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$ conv. $\Rightarrow \sum a_k$ conv.
  $\left(\sum|a_k| = +\infty \text{ o } \sum|a_k| = +\infty \not\Rightarrow \sum a_k \text{ indet. e } \sum a_k \text{ conv.}\right)$
- Riordinamento: $\sum|a_n| = <+\infty$, $\forall b_n = a_{\sigma(n)}$ si ha che $\sum b_n < +\infty$ e $\sum b_n = \sum a_n$
- Riemann: $\sum a_n < +\infty$ e $\sum|a_n| = +\infty$, $\exists \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ t.c.
  $\sum a_{\sigma_1} = \ell$, $\sum a_{\sigma_2} = +\infty$, $\sum a_{\sigma_3}$ indet
- Cleibniz: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e $0 \le a_{n+1} \le a_n \Rightarrow \sum(-1)^n a_n$ converge e l'errore $\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right| \le a_{n+1}$
- Successioni complesse: $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} z \in \mathbb{C}$ se $d(z_n, z) \to 0$ converge; $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ diverge
  Teo: $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} z \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \wedge \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$ $n \to +\infty$
- Serie complesse: $z_n = a_n + i b_n$, $\sum(a_n + i b_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum a_n$ e $\sum b_n < +\infty$
  - se $\sum|z_n| < +\infty \Rightarrow \sum z_n < +\infty$
    $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ sono applicabili tutti i criteri per $\mathbb{R}$
  - $\sum z^n < +\infty \Leftrightarrow |z| < 1$
- Serie di potenze: $\sum a_n(x-x_0)^n$ o $\sum a_n(z-z_0)^n$.
  R raggio di convergenza
  $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ oppure $= \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
  - → ass. conv. se $|x-x_0|<r$, $|z-z_0|<r$
  - → non conv. se $|x-x_0|>r$, $|z-z_0|>r$
  - → da verificare se $|x-x_0|=r$, $|z-z_0|=r$
- $r>0$ di $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ → f continua su $(-r,r)$
  → integrabile $[t,x]$ $t,x \in (-r,r)$ $= \int_0^x f(\epsilon)\,d\epsilon = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$
  → derivabile ∞ su $(-r,r)$ $= f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$

Sviluppi di T

Polinomio resto di P: $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \Rightarrow f(x)=T_n(x)+\theta((x-x_0)^n)$

resto di L.: $f(x)=T_n(x)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}y(x-x_0)^{n+1}$

Sviluppi intorno a 0

- $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+\theta(x^n)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\dots+\frac{1}{n!}x^n$
- $\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\theta(x^{2k+2})=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
- $\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\theta(x^{2n})=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$
- $\log(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+\theta(x^n)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$
- $\log(x)\sim_{x\to 1}x-1+\theta(x-1)$
- $\arctan(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+\theta(x^{2n+2})$
- $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$
- $\tan x=x+\theta(x)$
- $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$
- $(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k=1+\alpha x+\theta(x)$

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Derivate successive: $f'(x_0)=0,\ D^h f(x_0)=0\ \forall h\ 1\le h\le n,\ D^n(f(x_0))\neq 0$

- n dispari $x_0 \Rightarrow$ flesso
- n pari — $D^n f(x_0)<0$ max
  — $D^n f(x)>0$ min

Stirling $n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,(1+\theta(1))$

- successione $\sqrt[n]{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388-9837745